Formula di Stirling

Teorema 1 (Formula di Stirling[1]) *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$n! = \Big(\frac{n}{e}\Big)^n \big(\sqrt{2\pi n} + \alpha_n\big) \ , \qquad \text{con} \qquad |\alpha_n| < 1 \ . \tag{1}$$

Dimostrazione Integrando per parti si ottiene immediatamente che

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \ , \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \ . \tag{2}$$

Cambiando variabile in (2) ponendo $x = z + n$ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx &= \int_{-n}^\infty (z+n)^n e^{-(z+n)} dz \\ &= \Big(\frac{n}{e}\Big)^n \Big(\int_{-n}^0 \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n e^{-z} dz + \int_0^\infty \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n e^{-z} dz \Big) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Faremo due cambi di variabili diversi nei due integrali precedenti ponendo, rispettivamente, $z = z_-(t)$ nel primo integrale e $z = z_+(t)$ nel secondo; tali funzioni $z_\pm$ saranno definite tramite le loro funzioni inverse. Definiamo, dunque[2],

$$\begin{cases} z \in (0,\infty) \mapsto t_+(z) := \sqrt{z - n \log\big(1 + \frac{z}{n}\big)} \ , \\ z \in (-n,0) \mapsto t_-(z) := -\sqrt{z - n \log\big(1 + \frac{z}{n}\big)} \ . \end{cases} \tag{4}$$

Osserviamo che, per ogni $z \neq 0$ e $z > -n$, si ha

$$z \cdot t_\pm(z) > 0 \ , \tag{5}$$
$$e^{-t_\pm^2(z)} = \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n e^{-z} \ . \tag{6}$$

Calcolando la derivata di $t_\pm$ si ha

$$t'_\pm(z) = \frac{1}{2}\ \frac{\pm z}{z+n} \frac{1}{\sqrt{z - n\log\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)}} \overset{(4)}{=} \frac{1}{2}\ \frac{z}{z+n}\ \frac{1}{t_\pm(z)} \ . \tag{7}$$

In particolare, *le funzioni $t_\pm$ sono strettamente crescenti sul loro dominio di definizione e quindi sono ben definite le rispettive funzioni inverse*[3]

$$z_- : \ t \in (-\infty, 0) \to z_-(t) \in (-n, 0) \ , \qquad z_+ : \ t \in (0,\infty) \to z_+(t) \in (0,\infty) \ , \tag{8}$$

[1] James Stirling (1692-1770). Vedi anche https://it.wikipedia.org/wiki/Approssimazione_di_Stirling.

[2] Si noti che $z - n\log\Big(1+\frac{z}{n}\Big) > 0$ per ogni $z > -n$, $z \neq 0$: infatti, la funzione $z \in (-n,\infty) \to n\log\Big(1+\frac{z}{n}\Big)$ è strettamente concava e la retta tangente in $z = 0$ è la retta $z \to z$.

[3] Si noti che $t_\pm(0\pm) = 0$ e $\lim\limits_{z\to -n+} t_-(z) = -\infty$ e $\lim\limits_{z\to\infty} t_+(z) = \infty$.

che, in vista di (6), soddisfano

$$\Big(1+\frac{z_\pm}{n}\Big)^n e^{-z_\pm} = e^{-t^2}\ , \tag{9}$$

e le cui derivate sono date da

$$z_\pm'(t) = \frac{1}{t_\pm'\big(z_\pm(t)\big)} = 2\ \Big(1+\frac{n}{z_\pm(t)}\Big)\ t\ . \tag{10}$$

Definiamo, ora, le seguenti funzioni[4]

$$t\in\mathbb{R}_\pm \mapsto \theta_\pm(t) := \sqrt{\frac{n}{2}}\ \frac{1}{t} - \frac{n}{z_\pm(t)}\ . \tag{11}$$

Da tale definizione segue immediatamente che[5] $\theta_\pm \in C^\infty(\mathbb{R}_\pm)$. Si ha anche che

$$0<\theta_\pm(t)<1\ ,\qquad \forall\ t\in\mathbb{R}_\pm\ ,\quad (\forall\ n\in\mathbb{N})\ ; \tag{12}$$

rimandiamo, per il momento, la dimostrazione della (12) e completiamo la dimostrazione del Teorema.
Dalle (10) e (11) segue immediatamente che

$$z_\pm'(t) = \sqrt{2n} + 2(1-\theta_\pm)t\ . \tag{13}$$

Definiamo, ora[6],

$$\theta(t) := \begin{cases} \theta_-(t) & \text{se } t<0 \\ \theta_+(t) & \text{se } t>0 \end{cases}\ ,\qquad \alpha_n := \int_{-\infty}^{\infty} 2\big(1-\theta(t)\big)te^{-t^2}\ , \tag{14}$$

e si ricordi il valore dell'integrale Gaussiano[7]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} = 2\int_0^\infty e^{-t^2} = \sqrt{\pi}\ . \tag{15}$$

Ora, facendo i cambi di variabile $z = z_-(t)$ e $z_+(t)$, rispettivamente, nel primo e secondo integrale in (3), otteniamo

$$\begin{aligned}
n! &\overset{(2),(3)}{=} \Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big(\int_{-n}^0\Big(1+\frac{z_-}{n}\Big)^n e^{-z_-}\ z_-'dt + \int_0^\infty\Big(1+\frac{z_+}{n}\Big)^n e^{-z_+}\ z_+'dt\Big)\\
&\overset{(9)}{=} \Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big(\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}z_-'(t)dt + \int_0^\infty e^{-t^2}z_+'(t)dt\Big)\\
&\overset{(13)}{=} \Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big(\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}\big(\sqrt{2n}+2(1-\theta_-)t\big)dt + \int_0^\infty e^{-t^2}\big(\sqrt{2n}+2(1-\theta_+)t\big)dt\Big)\\
&= \Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big(\sqrt{2n}\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt + \int_{-\infty}^\infty 2(1-\theta)te^{-t^2}dt\\
&\overset{(15),(14)}{=} \Big(\frac{n}{e}\Big)^n\big(\sqrt{2\pi n}+\alpha_n\big)\ .
\end{aligned} \tag{16}$$

[4] $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$, $\mathbb{R}_- := (-\infty,0)$.
[5] Si noti che $z_\pm$ essendo l'inversa di una funzione C^∞ è C^∞.
[6] Si noti che, essendo θ regolare e limitata, l'integrale generalizzato in (14) converge assolutamente; si osservi anche che tutte le funzioni sin qui introdotte ($t_\pm$, $z_\pm$ etc.) dipendono tutte da n.
[7] Si veda, ad esempio, il file http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM120_16_17/integrale_di_Gauss.pdf.

Inoltre, $\alpha_n = \alpha_n^+ - \alpha_n^-$ con

$$\alpha_n^+ := \int_0^\infty 2(1-\theta_+)te^{-t^2}dt \ , \qquad \alpha_n^- := -\int_{-\infty}^0 2(1-\theta_-)te^{-t^2}dt \ . \tag{17}$$

Si noti che $\alpha_n^\pm > 0$ e che (12) implica $0 < (1-\theta_\pm) < 1$ e quindi

$$\alpha_n^\pm < 2\int_0^\infty te^{-t^2}dt = 1,$$

il che prova[8]

$$|\alpha_n| = |\alpha_n^+ - \alpha_n^-| < 1 \ . \tag{18}$$

L'identità (16) e la (18) implicano il Teorema 1.

Dimostriamo ora la (12).

Dalla formula di Taylor al secondo ordine con resto di Lagrange si ha che, per ogni $x > -1$ esiste[9] $\xi \in I(0,x)$ tale che

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{(1+\xi)^2} \ , \qquad \xi \in I(0,x) \ . \tag{19}$$

Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $0 \neq z > -n$, esiste $\xi \in I(0,z/n)$ tale che

$$\log\left(1+\frac{z}{n}\right) = \frac{z}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2 \frac{1}{(1+\xi)^2} \ , \qquad \xi \in I(0,z/n) \ , \qquad 0 \neq z > -n \ . \tag{20}$$

Dunque:

$$(1+\xi)^2 = \frac{1}{2n}\,\frac{z^2}{z - n\log\left(1+\frac{z}{n}\right)} \ , \tag{21}$$

e quindi[10] *lo* $\xi \in I(0,z/n)$ *in* (21) *è unico* e lo chiameremo ξ_+ se $z > 0$ e ξ_- se $z \in (-n,0)$. Dalla (21), segue che

$$1+\xi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2n}}\,\frac{|z|}{\sqrt{z - n\log\left(1+\frac{z}{n}\right)}} \overset{(4)}{=} \frac{1}{\sqrt{2n}}\,\frac{|z|}{|t_\pm(z)|} \overset{(5)}{=} \frac{1}{\sqrt{2n}}\,\frac{z}{t_\pm(z)} = \frac{1}{\sqrt{2n}}\,\frac{z_\pm(t)}{t} \ ; \tag{22}$$

l'ultima uguaglianza, valida per ogni $t \in \mathbb{R}_\pm$, deriva dal fatto che $z_\pm$ è la funzione inversa di $t_\pm$. Ne segue che la (22) *definisce due funzioni* C^∞

$$\xi_\pm : t \in \mathbb{R}_\pm \mapsto \xi_\pm(t) := \frac{1}{\sqrt{2n}}\,\frac{z_\pm(t)}{t} - 1 \ ; \tag{23}$$

si noti che dal fatto che $\xi \in I(0,z/n)$ in (20), si ha che

$$\frac{z_-(t)}{n} < \xi_-(t) < 0 \ , \qquad 0 < \xi_+(t) < \frac{z_+(t)}{n} \ . \tag{24}$$

Da (22) e la definizione di $\theta_\pm$ in (11) segue che

$$\frac{n}{z_\pm(t)}\,\xi_\pm(t) = \theta_\pm(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_\pm \ . \tag{25}$$

Ricordando che $z_- < 0 < z_+$, da (24) e (25) segue la (12). ∎

---

[8] Si noti che se a e b sono due numeri in $(0,1)$ allora $-1 < a-b < 1$, ossia $|a-b| < 1$.

[9] $I(0,x) = (0,x)$ se $x > 0$ e $I(0,x) = (x,0)$ se $x < 0$.

[10] Si osservi che $\xi > -1$.